УДК 532
DOI 10.18413/2075-4639-2018-50-3-308-316

УРАВНЕНИЯ ТЕЧЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СМЕСИ ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

EQUATIONS OF FLOW MULTICOMPONENT MIXTURE OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID

А.С. Кравчук, А.И. Кравчук
A. S. Kravchuk, A. I. Kravchuk

Белорусский государственный университет, 220030, пр. Независимости, 4, Минск, Республика Беларусь

Belarusian State University, 220030, 4 Nezavisimosti Ave., Minsk, Republic of Belarus

E-mail: as-kravchuk7@yandex.ru

Аннотация
В связи с тем, что при выводе уравнений математической физики используется стандартный прием – вывод уравнений для выделенного элементарного объема среды, то это позволяет, используя методику, разработанную авторами, обобщать известные уравнения на случай композиционных сред с использованием объемных долей компонент, где неявно используется гипотеза о том, что объемные доли компонент являются дискретной случайной величиной, описывающей вероятности присутствия той или иной компоненты неоднородной среды в конкретной точке с заданными координатами как элементарного объема, так и исследуемой геометрической области в целом. Построенная система уравнений позволяет решать задачи гидродинамики, например, для многокомпонентных смесей взаимно-нерастворимых жидкостей.

Abstract
Due to the fact that in the derivation of equations of mathematical physics using the standard method – derivation of the equations for the selected elementary volume of the medium, it allows using the method developed by the authors to generalize known equations to the case of composite media with volume fraction of the component. Implicitly used hypothesis that the volume fractions of the components are discrete random variable that describes the probability of the presence of one component of an inhomogeneous medium at a particular point with given coordinates at an elementary volume, as well as at geometric area as a whole. The constructed system of equations allows us to solve hydrodynamics problems, for example, for multi-component mixtures of mutually insoluble liquids.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость; вязкость, объемная доля компонент; эффективные свойства многокомпонентной смеси; системы уравнений Эйлера для усредненных давлений, векторов скорости и массовых сил; системы уравнений Навье-Стокса для усредненных давлений, вязкостей, векторов скорости и массовых сил.
Keywords: incompressible fluid; the viscosity, the volume fraction of the components; effective properties of a multicomponent mixture; the system of Euler equations for the average pressure, vectors of velocity and the mass forces; Navier-Stokes equations for the averaged pressure, viscosity, vectors of velocity and mass forces.

Введение

Механика жидкостей является одной из основных прикладных дисциплин для многих специальностей физико-математического и инженерного образования. В настоящее время она достаточно хорошо разработана [1, 2].

Однако, как и в других современных разделах математической физики, в этом разделе механики актуальна задача по обобщению известных систем уравнений для однородных жидкостей на многокомпонентные смеси, которые являются аналогами композиционных тел в механике твердого тела [3].

Данная статья демонстрирует возможность прямого переноса методики, разработанной авторами для твердых композиционных тел на многокомпонентные смеси жидкостей [4].

1. Методика исследования

Основным методом вывода систем уравнений динамики является получение уравнений движения выделенного элементарного объема $dV = dx \cdot dy \cdot dz$ (где dx, dy, dz – малые приращения вдоль осей декартовой системы координат с осями $0x$, $0y$, $0z$) рассматриваемого объема сплошной среды [1]. Соответственно V – объем, в котором рассматривается движение жидкости.

В настоящее время этот подход получил повсеместное признание и используется при выводе всех уравнений математической физики [5–8].

В связи с гипотезой несжимаемости предполагается, что для плотности жидкости $\rho(x, y, z)$ выполняется простейшее характеристическое уравнение $\rho(x, y, z) = const$ [2].

Особенности вывода уравнений для композиционных сред с использованием объемных долей компонент

Будем называть представительным объемом композиционной среды наименьший объем, в котором физические характеристики остаются в среднем равными физическим характеристикам всего объема среды.

Отметим, что рассмотрение представительного малого объема среды допускает обобщение вывода данных уравнений практически без изменений на случай соответствующих уравнений для композиционного материала с использованием объемных долей [6, 7].

В отличие от сплошной среды уравнения не будут верны непосредственно при предельном переходе $dV \to 0$, т. к. в теории композиционных материалов представительный объем композиционного материала $dV \neq 0$. Но с другой стороны он бесконечно мал по сравнению со всем объемом V. Точнее $\sqrt[3]{dx \cdot dy \cdot dz}$ (характерный размер представительного объема) мал по сравнению с наименьшим характерным объемом композиционного тела. При этом и во всем объеме тела, и в элементарном объеме dV концентрации компонент (объемные доли) равны γ_k (где k ($k = \overline{1,n}$) – номер компоненты, при этом выполнено условие нормировки $\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 1$).

Аналогичная гипотеза о малости представительного объема многокомпонентной смеси жидкостей по сравнению с размерами объема, в котором исследуется течение, будет использоваться в дальнейшем. Очевидно, что для каждой компоненты представительного объема многокомпонентной смеси жидкостей должны быть известны ее плотность ρ_k и вязкость η_k, кроме того действующие на нее вектор массовых сил $\vec{f}_k$.

При использовании данных гипотез план вывода уравнений математической физики полностью сохраняется с точностью до замены понятия элементарного объема на представительный объем [6, 7].

Отметим также, что в смысле формулировки объемных долей γ_k их можно рассматривать также как дискретную случайную величину присутствия компоненты с номером k в точке с координатами $(x,y,z)\in V$.

Обозначим через $\vec{v}_k(x,y,z)$ и $p_k(x,y,z)$ дискретные значения вектора скорости и давления на k-ой компоненте среды. Домножая на γ_k и суммируя по k получаем средние по реализации композиции вектор скорости и давление (матожидания дискретных случайных величин):

$$\left\langle \vec{v}(x,y,z)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \vec{v}_k(x,y,z), \qquad \left\langle p(x,y,z)\right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot p_k(x,y,z). \tag{1}$$

Таким образом, стационарность обеспечивается требованием воспроизведения концентраций на всех уровнях объема от представительного dV до общего V. Эргодичность обеспечивается равенством среднего по представительному объему среднему по реализации (1):

$$\left\langle v(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\iiint\limits_{(dV)} dxdydz} \cdot \iiint\limits_{(dV)} v(x,y,z)dxdydz, \tag{2}$$

$$\left\langle p(x,y,z)\right\rangle = \frac{1}{\iiint\limits_{(dV)} dxdydz} \cdot \iiint\limits_{(dV)} p(x,y,z)dxdydz \tag{3}$$

2. Результаты исследования и их обсуждение

Система уравнений Навье-Стокса для безвихревого потока вязкой несжимаемой жидкости имеет вид [1, 2, 9,10]:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\cdot grad(p) + \vec{f} + \frac{\eta}{\rho}\cdot \nabla^2 \vec{v}, \qquad div\,\vec{v} = 0, \tag{4}$$

где $\vec{f} = (f_x, f_y, f_z)$ – вектор массовой силы (размерность ускорения), η – вязкость жидкости.

Из системы (4) при $\eta = 0$ можно получить систему уравнений Эйлера движения несжимаемой невязкой жидкости для безвихревого потока [1,11,12].

Усреднение уравнений Эйлера

Будем рассматривать представительный объем dV потока многокомпонентной смеси жидкостей, для которого верна система уравнений (4) при $\eta = 0$. По аналогии с гипотезой Фойгта в механике композиционных сред [6, 7] будем предполагать, что распределение градиента давления p в элементарном (представительном) объеме не зависит от наличия в той или иной точке включений других жидкостей и является непрерывно дифференцируемой функцией. В общем случае будем считать, что вектора массовых сил $\overrightarrow{f_k}$ различны для каждой из компонент. Из (4) получаем закон определения вектора скорости жидкостей для k-ой компоненты системы в виде:

$$\frac{d\overrightarrow{v_k}}{dt} = -\frac{1}{\rho_k}\cdot grad(p) + \overrightarrow{f_k}, \qquad div\,\overrightarrow{v_k} = 0. \qquad (5)$$

Домножая (5) на γ_k и суммируя по k, получаем для средних по Фойгту вектора скорости $\langle\vec{v}\rangle_V$, плотности $\langle\rho\rangle_V$ и вектора массовых сил $\langle\vec{f}\rangle_V$ [6, 7]:

$$\frac{d\langle\vec{v}\rangle_V}{dt} = -\frac{1}{\langle\rho\rangle_V}\cdot grad(p) + \langle\vec{f}\rangle_V, \qquad div\langle\vec{v}\rangle_V = 0. \qquad (6)$$

$$\langle\vec{v}\rangle_V = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\overrightarrow{v_k},\ \langle\rho\rangle_V = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\gamma_k}{\rho_k}\right)^{-1}, \qquad \langle\vec{f}\rangle_V = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\overrightarrow{f_k}. \qquad (7)$$

Отметим в дополнение к (6), что по определению непрерывная функция $p \equiv p_k$ одновременно является и средним значением по Фойгту:

$$\langle p\rangle_V = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot p_k = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot p = p\cdot\sum_{k=1}^{n}\gamma_k = p. \qquad (8)$$

По аналогии с гипотезой Рейсса в механике композиционных сред [6, 7] будем предполагать, что распределение проекций вектора скорости v_k жидкости элементарного объема не зависит от наличия в той или иной точке включений разных материалов и является непрерывно дифференцируемой по времени функцией. Тогда для k-ой компоненты жидкости, аналогично (5) из (4), получаем:

$$\rho_k\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -grad(p_k) + \rho_k\cdot\overrightarrow{f_k}, \qquad div\,\vec{v} = 0. \qquad (9)$$

После домножения на объемные доли γ_k и суммирования с учетом аналогичного (8) равенства для вектора скорости, получаем для средних по Рейссу значений систему уравнений:

$$\frac{d\langle\vec{v}\rangle_R}{dt} = -\frac{1}{\langle\rho\rangle_R}grad(\langle p\rangle_R) + \langle\vec{f}\rangle_R, \qquad div\langle\vec{v}\rangle_R = 0. \qquad (10)$$

$$\langle\rho\rangle_R = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\rho_k, \langle p\rangle_R = \sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot p_k, \qquad \langle\vec{f}\rangle_R = \frac{1}{\langle\rho\rangle_R}\cdot\sum_{k=1}^{n}\gamma_k\cdot\rho_k\cdot\vec{f_k}. \tag{11}$$

Далее используется первая гипотеза о том, что эффективный вектор скорости $\langle\vec{v}\rangle$ элемента гомогенизированной жидкости вычисляется как линейная комбинация $\langle\vec{v}\rangle = \alpha\cdot\langle\vec{v}\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\langle\vec{v}\rangle_R$ средних по Фойгту $\langle\vec{v}\rangle_V$ и по Рейссу $\langle\vec{v}\rangle_R$ (где $0<\alpha<1$ – вещественный коэффициент) при этом предполагается, что для эффективного давления выполнено равенство $\langle p\rangle = \langle p\rangle_V = \langle p\rangle_R$. Тогда из (6) и (10) получаем:

$$\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt} = -\frac{1}{\underline{\langle\rho\rangle}_\alpha}\cdot grad(\langle p\rangle) + \underline{\langle\vec{f}\rangle}_\alpha, \qquad div\langle\vec{v}\rangle = 0, \tag{12}$$

где

$$\underline{\langle\rho\rangle}_\alpha = \left(\frac{\alpha}{\langle\rho\rangle_V} + \frac{(1-\alpha)}{\langle\rho\rangle_R}\right)^{-1}, \qquad \underline{\langle\vec{f}\rangle}_\alpha = \left(\alpha\langle\vec{f}\rangle_V + (1-\alpha)\langle\vec{f}\rangle_R\right). \tag{13}$$

Используя обратный набор гипотез ($\langle p\rangle = \alpha\cdot\langle p\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\langle p\rangle_R$ и $\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v}\rangle_V = \langle\vec{v}\rangle_R$), получаем еще один вариант оценки эффективных коэффициентов системы уравнений Эйлера течения гомогенизированной несжимаемой жидкости:

$$\overline{\langle\rho\rangle}_\alpha\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt} = -grad(\langle p\rangle) + \overline{\langle\vec{f}\cdot\rho\rangle}_\alpha, \qquad div\langle\vec{v}\rangle = 0, \tag{14}$$

где

$$\overline{\langle\rho\rangle}_\alpha = \alpha\cdot\langle\rho\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\langle\rho\rangle_R, \ \overline{\langle\vec{f}\cdot\rho\rangle}_\alpha = \alpha\cdot\langle\vec{f}\rangle_V\cdot\langle\rho\rangle_V + (1-\alpha)\cdot\langle\vec{f}\rangle_R\cdot\langle\rho\rangle_R \tag{15}$$

Интегирируя по α на интервале $[0,1]$ коэффициенты в (13) и (15), получаем вилку Кравчука-Тарасюка оценки эффективной плотности $\left[\underline{\langle\rho\rangle}, \overline{\langle\rho\rangle}\right]$ несжимаемой многокомпонентной смеси жидкостей и вектора массовых сил $\left[\underline{\langle\vec{f}\rangle}, \overline{\langle\vec{f}\rangle}\right]$, действующих на ее компоненты [6–8]:

$$\underline{\langle\rho\rangle} = \frac{\langle\rho\rangle_R\cdot\langle\rho\rangle_V}{\langle\rho\rangle_R - \langle\rho\rangle_V}\ln\left(\frac{\langle\rho\rangle_R}{\langle\rho\rangle_V}\right), \qquad \overline{\langle\rho\rangle} = \frac{1}{2}\cdot\left(\langle\rho\rangle_V + \langle\rho\rangle_R\right). \tag{16}$$

$$\underline{\langle \vec{f} \rangle} = \frac{1}{2}\left(\langle \vec{f} \rangle_V + \langle \vec{f} \rangle_R\right), \qquad \overline{\langle \vec{f} \rangle} = \frac{\langle \vec{f} \rangle_V \cdot \langle \rho \rangle_V + \langle \vec{f} \rangle_R \cdot \langle \rho \rangle_R}{\langle \rho \rangle_V + \langle \rho \rangle_R} \tag{17}$$

В качестве оценки эффективной плотности жидкости $\langle \rho \rangle$ и вектора массовых сил $\langle \vec{f} \rangle$, как и ранее [6, 7], предлагается использовать средние значения вилки Кравчука-Тарасюка:

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{2}\left(\underline{\langle \rho \rangle} + \overline{\langle \rho \rangle}\right), \qquad \langle \vec{f} \rangle = \frac{1}{2}\left(\underline{\langle \vec{f} \rangle} + \overline{\langle \vec{f} \rangle}\right). \tag{18}$$

Очевидно, что если $\overrightarrow{f_k}$ не зависит от номера компоненты k (например, если присутствует только сила тяжести), то соответствующие коэффициенты сильно упрощаются.

Уравнения (13) и (14) определяют средние плотность и вектор массовых сил для системы уравнений Эйлера движения многокомпонентной смеси несжимаемых жидкостей, построенных в смысле средних (матожиданий) по представительному объему вектора скорости и давлений.

Оценка средних коэффициентов вязкости в представительном объеме

Как и ранее будем исходить из анализа элементарного (представительного) объема [1].

Будем использовать уравнения Ньютона для связи касательных напряжений и с компонентами градиента скорости. Опуская очевидные выкладки сразу можно записать, что при постоянной вязкости η сила трения $\vec{F}_{fr}$, действующая на все грани выделенного элементарного трехмерного объема, имеет выражение [1]:

$$\vec{F}_{fr} = \eta \cdot \left(\nabla^2 \vec{v}\right) \cdot dxdydz. \tag{19}$$

Будем предполагать, что распределение трения на границах выделенного элементарного объема является непрерывным и не зависит от номера k компоненты многокомпонентной жидкости. Тогда из (19) следует, что для k-ой компоненты будет выполняться:

$$\vec{F}_{fr} = \eta_k \cdot \left(\nabla^2 \overrightarrow{v_k}\right) \cdot dxdydz. \tag{20}$$

Разделив (20) на η_k, домножив на γ_k и просуммировав по k получаем:

$$\langle \vec{F}_{fr} \rangle_V = \left(\langle \eta \rangle_F \cdot \nabla^2 \langle \vec{v} \rangle_V\right) \cdot dxdydz. \tag{21}$$

где

$$\langle \eta \rangle_F = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{\eta_k}\right)^{-1}. \tag{22}$$

Предполагая непрерывность поля скорости и независимость его от номера компоненты k, не повторяя рассуждения предыдущего параграфа, запишем среднее по Рейссу:

$$\left\langle \vec{F}_{fr} \right\rangle_R = \langle \eta \rangle_R \cdot \left(\nabla^2 \left\langle \vec{v} \right\rangle_R \right) \cdot dxdydz, \tag{23}$$

где

$$\langle \eta \rangle_R = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \cdot \eta_k . \tag{24}$$

Дословно используя план (12)–(18), можно записать связь средней силы трения $\left\langle \vec{F}_{fr} \right\rangle$ (его матожидания в смысле дискретной случайной величины) с матожиданием вектора скорости $\left\langle \vec{v} \right\rangle$ гомогенизированной жидкости в виде (Рисунок 1):

$$\left\langle \vec{F}_{fr} \right\rangle \approx \langle \eta \rangle \cdot \left(\nabla^2 \left\langle \vec{v} \right\rangle \right) \cdot dxdydz, \tag{25}$$

где

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{2} \cdot \left(\underline{\langle \eta \rangle} + \overline{\langle \eta \rangle} \right), \qquad \underline{\langle \eta \rangle} = \frac{\langle \eta \rangle_R \cdot \langle \eta \rangle_V}{\langle \eta \rangle_R - \langle \eta \rangle_V} \ln\left(\frac{\langle \eta \rangle_R}{\langle \eta \rangle_V} \right), \qquad \overline{\langle \eta \rangle} = \frac{1}{2} \cdot \left(\langle \eta \rangle_V + \langle \eta \rangle_R \right) \tag{26}$$

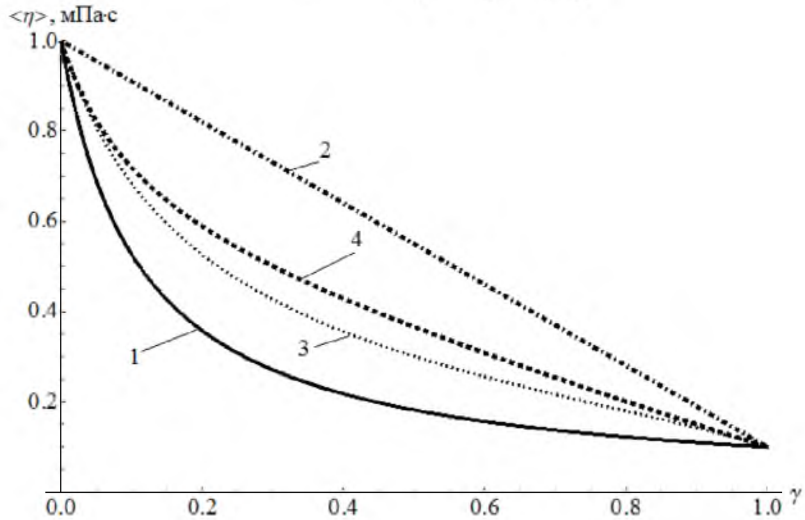

Рис. 1. Вилка Фойгта-Рейсса $\left[\langle \eta \rangle_F, \langle \eta \rangle_R \right]$ и Кравчука-Тарасюка $\left[\underline{\langle \eta \rangle}, \overline{\langle \eta \rangle} \right]$ оценки разброса вязкости двухкомпонентной смеси несжимаемых жидкостей ($\eta_1 = 0.1\, мПа \cdot c$, $\eta_2 = 0.1\, мПа \cdot c$) в зависимости от концентраций компонент γ:
1 - $\langle \eta \rangle_F$ (17); 2 – $\langle \eta \rangle_R$ (18); 3 - $\underline{\langle \eta \rangle}$ (20); 4 - $\overline{\langle \eta \rangle}$ (20)

Fig. 1. Fig 1. Fork Voigt-Reuss $\left[\langle \eta \rangle_F, \langle \eta \rangle_R \right]$ and Kravchuk-Tarasyuk $\left[\underline{\langle \eta \rangle}, \overline{\langle \eta \rangle} \right]$ estimating the viscosity spread of a two-component mixture of incompressible liquids ($\eta_1 = 0.1\, mPa \cdot c$,

$\eta_2 = 0.1\,mPa \cdot c$), depending on the concentrations of the components

γ : 1 - $\langle\eta\rangle_F$ (17); 2 – $\langle\eta\rangle_R$ (18); 3 - $\underline{\langle\eta\rangle}$ (20); 4 - $\overline{\langle\eta\rangle}$ (20)

Следуя плану вывода системы уравнений движения представительного объема для однородной жидкости, изложенному в [1], получим эту систему с использованием эффективных коэффициентов (18) и (26):

$$\langle\rho\rangle\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt}\cdot dV = -grad(\langle p\rangle)\cdot dV + \langle\rho\rangle\cdot\langle\vec{f}\rangle\cdot dV + \langle\vec{F}_{fr}\rangle. \tag{27}$$

Подставляя (25) в (27) и сокращая на $dV = dxdydz$, получаем систему уравнений в терминах матожидания всех физических величин, вычисленных для элементарного объема:

$$\frac{d\langle\vec{v}\rangle}{dt} = -\frac{1}{\langle\rho\rangle}grad(\langle p\rangle) + \langle\vec{f}\rangle + \frac{\langle\eta\rangle}{\langle\rho\rangle}\cdot\nabla^2\langle\vec{v}\rangle. \tag{28}$$

Кроме того, должно быть выполнено в среднем условие неразрывности $div\langle\vec{v}\rangle = 0$ для многокомпонентной смеси.

Отметим, что коэффициенты (14) и (20) могут использоваться исследователями для решения краевых задач течения несжимаемой жидкости с помощью любых программных средств с учетом необходимости выполнения условия малости минимального линейного размера представительного объема многокомпонентной смеси несжимаемых жидкостей по сравнению с минимальным размером области, в которой исследуется течение.

Выводы

Авторами была обобщена система уравнений Навье-Стокса течения однородной вязкой несжимаемой жидкости на случай использования многокомпонентной смеси. Предполагается, что известны объемные доли компонент.

Также получены эффективные коэффициенты для системы уравнений течения композиционной вязкой несжимаемой жидкости с учетом массовых сил.

Построенное авторами решение позволяет решать задачи гидродинамики, например, для многокомпонентных смесей взаимно-нерастворимых жидкостей.

Кроме того, можно рассмотреть также поведение тонкодисперсных, в том числе магнитно-реологических, суспензий, предполагая, например, для одного твердого вещества, что его доля в составе суспензии равняется $\gamma_j \neq 0$, а его вязкость равна нулю ($\eta_j = 0$) в коэффициентах (28). Очевидно, этот подход элементарно распространяется на композитные тонкодисперсные суспензии с помощью того же правила: если твердые компоненты имеют номера с $j = \overline{1,m}$, то необходимо, чтобы в коэффициентах (28) $\gamma_j \neq 0$, $\eta_j = 0$ для любого j ($j = \overline{1,m}$).

Список литературы
References

1. Курбатов Ю.Л., Шелудченко В.И., Кравцов В.В. 2003. Механика жидкости и газа. Севастополь: Вебер, 226 с.

Kurbatov Yu.L., Sheludchenko V.I., Kravtsov V.V. 2003. Mechanics of fluid and gas. Seva-stop: Weber, 226 p.

2. Альтшуль А.Д., Киселев П.Г. 1975. Гидравлика и аэродинамика, М.: Стройиздат, 323 с.
Altshul AD, Kiselev P.G. 1975. Hydraulics and aerodynamics. Moscow: Stroiizdat, 323 p.
3. Тарасюк И.А., Кравчук А.С. 2014. Сужение «вилки» Фойгта-Рейсса в теории упругих структурно неоднородных в среднем изотропных композиционных тел без применения вариационных принципов. APRIORI. Серия: Естественные и технические науки, № 3. Режим доступа: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf
Tarasyuk IA, Kravchuk A.S. 2014. The narrowing of the Voigt-Reuss "plug" in the theory of elastic structurally inhomogeneous in average isotropic composite bodies without the use of variational principles. APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences, № 3. Access mode: http://apriori-journal.ru/seria2/3-2014/Tarasyuk-Kravchuk.pdf
4. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. 1972. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. Москва: Наука, 392 с.
Gershuni GZ, Zhukhovitsky Ye.M. 1972. Convective stability of an incompressible fluid. Moscow: Nauka, 392 p.
5. Араманович И.Г., Левин В.И. 1969. Уравнения математической физики. М.: Наука, 288 с.
Aramanovich I.G., Levin V.I. 1969. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 288 p.
6. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Тарасюк И.А. 2016. Методика вычисления эффективных коэффициентов в уравнении теплопроводности композиционного тела. Вестник СпбГУ. Серия 4, 2 (60), № 4: 335–341.
Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tarasyuk I.A. 2016. Method for calculating effective coefficients in the heat equation of a composite body. Bulletin of St. Petersburg State University. Series 4, 2 (60), No. 4: 335–341.
7. Кравчук А.С., Кравчук А.И., Попова Т.С. 2016. Уравнение диффузии композиционной смеси в композиционную среду. Инженерно-физический журнал, 89, № 4: 1041–1046.
Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Popova T.S. 2016. The equation of diffusion of a composite mixture into a composite medium. Engineering and Physics Journal, 89, No. 4: 1041–1046.
8. Eringen A.C. 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. J Appl Phys, 54, no. 9: 4703–4710.
9. Kim J.S., Lowengrub J.S. 2006. Interfaces and Multicomponent Fluids. Encyclopedia of Mathematical Physics. New York: Elsevier.
10. Frolov R. 2017. An Efficient Algorithm for the Multicomponent Compressible Navier-Stokes Equations in Low and High Mach Number Regimes. Computational Physics. Available at: https://pdfs.s HYPERLINK "https://pdfs.semanticscholar.org/92a8/b9bb68e98dafa471a76ea4f660871ab7e888.pdf" emanticscholar.org/92a8/b9bb68e98dafa471a76ea4f660871ab7e888.pdf
11. Лойцянский Л.Г. 2003. Механика жидкости и газа. Москва: Дрофа, 840 с.
Loitsyansky L.G. 2003. Mechanics of fluid and gas. Moscow: Drofa, 840 p.
12. Смайлов С.А., Кувшинов К.А. 2012. Механика жидкости и газа. Томск: Издательство Томского политехнического университета, 121 с.
Smailov SA, Kuvshinov K.A. 2012. Mechanics of fluid and gas. Tomsk: Tomsk Polytechnic University Press, 121 p.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. 1986. Гидродинамика. Москва: Наука, 736 с.
Landau L.D., Lifshitz E.M. 1986. Hydrodynamics. Moscow: Nauka, 736 p.
14. Xu S., Xu Z., Alber M. 2018. Three-phase Model of Visco-elastic Incompressible Fluid Flow and its Computational Implementation. Communications in Computational Physics. Available at: https://www.researchgate.net/publication/322959186_Three-phase_Model_of_Visco-elastic_ Incompressible_Fluid_Flow_and_its_Computational_Implementation.
15. Lake L.W. 1989. Enhanced Oil Recovery. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 550 p.